ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1978

OPTION P'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME I

Notations et données

On dit qu'une application f d'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est *itérable* si elle elle est injective et si $f(I)$ est contenu dans I.

f étant itérable, on définit la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ des "puissances" de f (pour la loi de composition des applications) par les conditions suivantes :

a) f^0 est l'application identique de I (c'est-à-dire l'application $x \longmapsto x$ de I dans I) ;

b) quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, f^n est l'application de I dans I, composée de n applications coïncidant avec f (f est considérée ici comme une application de I dans I) ;

c) quel que soit l'entier $n \leqslant -1$, f^n est la bijection de $f^{-n}(I)$ sur I, réciproque de la bijection $x \longmapsto f^{-n}(x)$ de I sur $f^{-n}(I)$.

Dans le problème, on se donne un nombre réel a et une application continue Ψ de l'intervalle $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, admettant dans l'intervalle ouvert $]a, +\infty[$ une dérivée strictement positive et continue. On suppose en outre que, quel que soit $x \in [a, +\infty[$, on a

$$\Psi(x) > x \ .$$

On se propose de trouver une application φ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telle que, quel que soit $x \in [a, +\infty[$, on ait

$$\varphi(\Psi(x)) = \varphi(x) + 1 \ . \tag{1}$$

Question 1

a) Vérifier que Ψ est itérable.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$a_n = \Psi^n(a) \ .$$

.../...

Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers l'infini.

c) Montrer que, quel que soit $x \in [a, +\infty[$, il existe un couple $(y, n) \in [a, a_1[\times \mathbb{N}$ et un seul, tel que l'on ait

$$x = \Psi^n(y) .$$

On définit ainsi l'application $Y : x \longmapsto y$ de $[a, +\infty[$ dans $[a, a_1[$ et l'application $P : x \longmapsto n$ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{N}$. Exprimer Y à l'aide de P et de la famille $(\Psi^k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Question 2

Montrer que l'application φ de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(x) = P(x) + 1 + \frac{Y(x) - a}{a_1 - a} , \tag{2}$$

est une solution de l'équation (1).

Question 3

Dans cette question, on étudie des propriétés de la fonction φ définie par (2).

a) Montrer que $\varphi(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.

b) Montrer que φ est continue.

c) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, φ est continûment dérivable sur l'intervalle ouvert $]a_n, a_{n+1}[$ et donner une expression de φ' dans cet intervalle, à l'aide de Ψ' et de la famille $(\Psi^k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

d) On fait l'hypothèse supplémentaire suivante : $\Psi'(x)$ admet une limite finie et non nulle lorsque x tend vers a.

Dans quel cas φ est-elle dérivable sur $[a, +\infty[$?

PROBLEME II

L'espace affine euclidien orienté E, de dimension 3, est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par Π le plan contenant les deux premiers axes de coordonnées et par $\vec{\Pi}$ le plan vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j})$; et l'on munit $\vec{\Pi}$ de l'orientation pour laquelle cette base est directe.

γ est une courbe de Π, sur laquelle ont été choisies une orientation et une origine. Un point m de γ est déterminé par son abscisse curviligne s ; on suppose que les coordonnées de m sont des fonctions indéfiniment dérivables de s et que le vecteur $\frac{\overrightarrow{d^2 m}}{ds^2}$ ne s'an-

.../...

nule pas. On pose $\vec{\tau} = \frac{\vec{dm}}{ds}$ et l'on désigne par $\vec{n}$ le vecteur tel que $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit une base orthonormée directe de $\vec{\Pi}$ et par R le rayon de courbure algébrique de γ en m (c'est-à-dire que, si c est le centre de courbure, on a $\vec{mc} = R\,\vec{n}$). La fonction $s \longmapsto R$ sera considérée comme une donnée. On suppose que, quel que soit s, on a $R > 0$.

On considère dans E un point mobile M, dont les projections orthogonales sur Π et sur le troisième axe de coordonnées sont désignées respectivement par m et m'. Etant donné un nombre $v > 0$, on suppose que m a pour trajectoire γ et que les mouvements de m et de m' sont uniformes, de vecteurs-vitesse respectifs $v\vec{\tau}$ et $v\vec{k}$. On désigne par $\vec{V}$ le vecteur-vitesse de M et par $\vec{A}$ son vecteur-accélération.

Sur la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{A}$, on considère un point P, défini par $\vec{MP} = \lambda\,\vec{A}$, où λ est donné en fonction de l'abscisse curviligne s de m. La fonction $s \longmapsto \lambda$ est supposée indéfiniment dérivable. Elle sera dite *admissible* si, à tout instant t, les vecteurs $\frac{\vec{dP}}{dt}$, $\frac{\vec{d^2P}}{dt^2}$ et $\vec{A}$ sont dans un même plan vectoriel.

Question 1

a) Expliciter $\vec{V}$ et $\vec{A}$, à partir de v, R, $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et $\vec{k}$.

b) Trouver les fonctions $s \longmapsto \lambda$ qui sont admissibles.

c) On désigne par $\vec{W}$ le vecteur-vitesse du point p défini par $\vec{Op} = \vec{MP}$.

Calculer le produit vectoriel $\vec{Op} \wedge \vec{W}$. Que peut-on dire du vecteur accélération de p lorsque la fonction $s \longmapsto \lambda$ est admissible ?

Question 2

m est repéré par ses coordonnées polaires $\theta = (\vec{i}, \vec{Om})$ et $\rho = \| \vec{Om} \|$. Etant donné un nombre $a > 0$, on prend pour γ la courbe d'équation polaire

$$\rho = a\, e^{\theta}$$

(e étant la base des logarithmes népériens), l'orientation étant celle pour laquelle $\frac{ds}{d\theta}$ est positif. On suppose qu'à l'instant O, on a $\vec{OM} = \vec{Om} = a\,\vec{i}$.

a) Déterminer la fonction $t \longmapsto \theta$, le choix de l'angle polaire de m à chaque instant étant tel que cette fonction soit continue (elle est alors indéfiniment dérivable) et prenne la valeur 0 pour $t = 0$.

b) La fonction $s \longmapsto \lambda$ étant supposée admissible, donner une représentation paramétrique de la trajectoire de P.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail